MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

Préſentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans ſes Aſſemblées.

Année 1773.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXVI.

ESSAI

Sur une application des règles de Maximis & Minimis *à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture.*

Par M. COULOMB, Ingénieur du Roi.

INTRODUCTION.

CE Mémoire est destiné à déterminer, autant que le mélange du Calcul & de la Physique peuvent le permettre, l'influence du frottement & de la cohésion, dans quelques problèmes de Statique. Voici une légère analyse des différens objets qu'il contient.

Après quelques observations préliminaires sur la cohésion, & quelques expériences sur le même objet, l'on détermine la force d'un pilier de maçonnerie; le poids qu'il peut porter, pressé suivant sa longueur; l'angle sous lequel il doit se rompre. Comme ce problème n'exige que des considérations assez simples, qui servent à faire entendre toutes les autres parties de cet Essai, tâchons de développer les principes de sa solution.

Si l'on suppose un pilier de maçonnerie coupé par un plan incliné à l'horizon, en sorte que les deux parties de ce pilier soient unies dans cette section, par une cohésion donnée, tandis que tout le reste de la masse est parfaitement solide, ou lié par une adhérence infinie; qu'ensuite on charge ce pilier d'un poids: ce poids tendra à faire couler la partie supérieure du pilier sur le plan incliné, par lequel il touche la partie inférieure. Ainsi, dans le cas d'équilibre, la portion de la pesanteur, qui agit parallèlement à la section, sera exactement égale à la cohérence. Si l'on remarque actuellement, dans le cas de l'homogénéité, que l'adhérence du pilier est réellement égale pour toutes les parties; il faut, pour que le pilier puiſſe ſupporter un fardeau, qu'il n'y ait aucune ſection de ce pilier, ſur laquelle l'effort décompoſé de ſa preſſion puiſſe faire couler la partie ſupérieure. Ainſi, pour déterminer le plus grand poids que puiſſe ſupporter un pilier, il faut chercher parmi toutes ſes ſections celle dont la cohéſion eſt en équilibre avec un poids qui ſoit un *minimum:* car, pour lors, toute preſſion, au-deſſus de celle déterminée par cette condition, ſeroit inſuffiſante pour rompre le pilier.

Outre la réſiſtance qui provient de la cohéſion, j'ai eu égard à celle dûe au frottement. Les mêmes principes ſuffiſent pour remplir les deux conditions: l'application de cette recherche peut s'étendre à tous nos édifices, dont la maſſe eſt toujours ſoutenue par des colonnes, ou par quelque moyen équivalent.

L'on détermine enſuite la preſſion des terres, contre les plans verticaux qui les ſoutiennent; la méthode eſt abſolument la même. Si l'on ſuppoſe en effet un triangle-rectangle ſolide, dont un des côtés, ſoit vertical, & dont l'hypothénuſe touche un plan incliné, ſur lequel le triangle tend à gliſſer; ſi ce triangle, ſollicité par ſa peſanteur, eſt ſoutenu par une force horizontale, par ſa cohéſion, & par ſon frottement, qui agiſſent le long de cette hypothénuſe, l'on déterminera facilement, dans le cas d'équilibre, cette force horizontale par les principes de Statique. Si l'on remarque enſuite que les terres étant ſuppoſées homogènes, peuvent ſe ſéparer dans le cas de rupture, non-ſeulement ſuivant une ligne droite, mais ſuivant une ligne courbe quelconque; il s'enſuit que pour avoir la preſſion d'une ſurface de terre contre un plan vertical, il faut trouver parmi toutes les ſurfaces décrites dans un plan indéfini vertical, celle qui, ſollicitée par ſa peſanteur, & retenue par ſon frottement & ſa cohéſion, exigeroit, pour ſon équilibre, d'être ſoutenue par une force horizontale, qui fut un *maximum;* car, pour lors il eſt évident que toute autre figure demandant une moindre force horizontale, dans le cas d'équilibre, la maſſe adhérente ne pourroit

ſe

ſe diviſer. Comme l'expérience donne à peu-près une ligne droite pour la ligne de rupture des terres, lorſqu'elles ébranlent leurs revêtemens, il ſuffit, dans la pratique, de chercher dans une ſurface indéfinie, parmi tous les triangles qui preſſent un plan vertical, celui qui demande, pour être ſoutenu, la plus grande force horizontale. Dès que cette force eſt déterminée l'on en déduit avec facilité les dimenſions des revêtemens.

L'on trouvera à la fin de ce même article les moyens de déterminer exactement parmi toutes les ſurfaces courbes que l'on peut tracer dans un fluide indéfini, celle dont la preſſion contre un plan vertical, eſt un *maximum,* en ayant égard au frottement & à la cohéſion. Cette recherche peut ſervir à trouver la preſſion des fluides cohérens, contre les parois des vaſes qui les ſoutiennent.

Enfin on termine ce Mémoire par chercher les dimenſions des voûtes, leurs points de rupture, les limites qui circonſcrivent leur état de repos, lorſque la cohéſion & le frottement contribuent à leur ſolidité. M. Gregori a démontré, je crois le premier, dans les *Tranſactions Philoſophiques*, que dans le ſyſtème de la peſanteur, la chaînette étoit la même courbe que la voûte qui ſeroit formée par une infinité d'élémens d'une épaiſſeur conſtante & infiniment petite. J'ai étendu cette propoſition, & j'ai prouvé que, quel que fût le nombre & la direction des forces qui agiroient ſur une voûte formée d'après les ſuppoſitions précédentes, la figure de cette voûte ſeroit la même que celle d'une chaînette ſollicitée par les mêmes puiſſances. Les mêmes principes ſuffiſent enſuite pour déterminer les joints lorſqu'ils ſont des quantités finies, ou qu'ils doivent former avec la courbe intérieure de la voûte un autre angle que le droit. Cette dernière hypothèſe a lieu dans les plates-bandes; l'on y trouve que ſi l'épaiſſeur eſt donnée, les joints, dans le cas d'équilibre, doivent être dirigés vers un même centre.

Les formules trouvées, en faiſant abſtraction des frottemens & de la cohéſion des joints, ne peuvent être d'aucune utilité dans la pratique; tous les Géomètres qui se sont occupés de cet objet s'en sont aperçus; ainsi, pour avoir des résultats que l'on peut employer, ils ont été obligés de fonder leurs calculs sur des suppositions qui les rapprochassent de la Nature. Ces suppositions consistent ordinairement à considérer les voûtes comme divisées en plusieurs parties, & à chercher ensuite les conditions d'équilibre de ces différentes parties: mais comme cette division se fait à peu-près d'une manière arbitraire; dans le dessein de l'apprécier, j'ai cherché par les règles *de maximis & minimis*, quels seroient les véritables points de rupture dans les voûtes trop foibles, & les limites des forces que l'on pourroit appliquer à celle dont les dimensions seroient données: j'ai tâché autant qu'il m'a été possible de rendre les principes dont je me suis servi assez clairs pour qu'un Artiste un peu instruit pût les entendre & s'en servir.

Ce Mémoire, composé depuis quelques années, n'étoit d'abord destiné qu'à mon usage particulier, dans les différens travaux dont je suis chargé par mon état; si j'ose le présenter à cette Académie, c'est qu'elle accueille toujours avec bonté le plus foible essai, lorsqu'il a l'utilité pour objet. D'ailleurs, les Sciences sont des monumens consacrés au bien public; chaque citoyen leur doit un tribut proportionné à ses talens. Tandis que les grands hommes, portés au sommet de l'édifice, tracent & élèvent les étages supérieurs, les artistes ordinaires répandus dans les étages inférieurs, ou cachés dans l'obscurité des fondemens, doivent seulement chercher à perfectionner ce que des mains plus habiles ont créé.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

Fig. 4. Soit le plan *abcde*, sollicité par des forces quelconques situées dans la direction de ce plan, en équilibre sur la ligne *AB*; la résultante de toutes ces forces sera perpendiculaire à la ligne *AB*, & tombera entre les points *a* & *e*.

II.

Si toutes les forces, qui agissent dans ce plan sont décomposées suivant deux directions, l'une parallèle à *AB*, l'autre qui lui soit perpendiculaire, la somme des forces décomposées, parallèlement à *AB*, sera nulle, & la somme des forces, perpendiculaires à *AB*, égalera la pression qu'éprouve la ligne *AB*.

III.

Si la pression qu'éprouve la ligne *AB* est exprimée par *P*, le même plan pourra être supposé sollicité par toutes les forces qui lui sont appliquées, & de plus par la réaction de la pression. Mais si toutes ces forces, ainsi que la réaction de la pression, sont décomposées suivant deux directions quelconques perpendiculaires l'une à l'autre; il suit de l'équilibre & de la perpendicularité des deux directions, que la résultante suivant chaque direction, sera nulle.

IV.

Du Frottement.

Le frottement & la cohésion ne sont point des forces actives comme la gravité, qui exerce toujours son effet en entier, mais seulement des forces coërcitives; l'on estime ces deux forces par les limites de leur résistance. Lorsqu'on dit, par exemple, que dans certains bois polis, le frottement sur un plan horizontal d'un corps pesant neuf livres, est trois livres; c'est dire que toute force au-dessous de trois livres ne troublera point son état de repos.

Je supposerai ici que la résistance dûe au frottement est proportionnelle à la pression, comme l'a trouvé M. Amontons; quoique dans les grosses masses le frottement ne suive pas exactement cette loi. D'après cette supposition, l'on trouve dans les briques le frottement, les trois quarts de la pression. Il sera bon de faire des épreuves sur les matériaux que l'on voudra employer. Il est impossible de fixer ici le frottement des pierres, les essais faits pour une carrière ne pouvant point servir pour une autre.

V.

De la cohésion.

La cohésion se mesure par la résistance que les corps solides opposent à la désunion directe de leurs parties. Comme chaque élément des solides, lorsqu'ils sont homogènes, est doué de cette même résistance; la cohésion totale est proportionnelle au nombre des parties à désunir, & par conséquent à la surface de rupture des corps. J'ai cherché à déterminer par quelques expériences, la force de cette cohésion; elles m'ont donné les résultats suivans.

I.ère Expérience. Fig. 1. J'ai pris un carreau *a b c d*, d'une pierre blanche, d'un grain fin & homogène *; ce carreau étoit d'un pied quarré, avoit un pouce d'épaisseur; je l'ai fait échancrer en *e* & en *f*, en sorte que *e f* formoit une gorge de deux pouces, par laquelle les deux parties du carreau restoient unies. J'ai suspendu ce carreau par cette gorge, en y introduisant deux cordes nouées en fronde; & par deux autres cordes j'ai suspendu un plateau de balance que j'ai chargé d'un poids *P*. Il a fallu augmenter ce poids jusqu'à 430 livres, pour rompre le carreau en *e f*, ce qui donne, pour la force de la cohésion, 215 livres par pouces.

II.ème Expérience. J'ai voulu voir si en rompant un solide de pierre, par une force dirigée suivant le plan de rupture, il falloit employer le même poids que pour le rompre, comme dans l'expérience précédente, par un effort perpendiculaire à ce plan. Pour cela j'ai introduit le petit solide *ABCD* dans (Fig. 2.) une mortoise *AGeg*, j'ai suspendu un bassin à la corde *eP*, qui enveloppoit le solide & qui joignoit la mortoise; le petit solide avoit deux pouces de largeur, un pouce de hauteur, ce qui donne la même surface de rupture que dans l'expérience

* Cette pierre se trouve autour de Bordeaux, & sert à construire les façades des grands édifices de cette ville.

précédente; il n'a rompu que lorſque le baſſin a été chargé de 440 livres. J'ai répété pluſieurs fois cette expérience, de même que la première, & j'ai preſque toujours trouvé qu'il falloit une plus grande force pour rompre le ſolide, lorſque cette force étoit dirigée ſuivant le plan de rupture, que lorſqu'elle étoit perpendiculaire à ce plan. Cependant, comme cette différence n'eſt ici que $\frac{1}{44}$ du poids total, & qu'elle s'eſt trouvée ſouvent plus petite, je l'ai négligée dans la théorie qui ſuit.

J'ai voulu voir comment ſe fait la rupture d'un corps, lorſqu'il eſt rompu par une force qui agit ſur lui avec un bras de levier; en conſéquence, j'ai encaſtré dans une mortoiſe *ACeg* un ſolide de la même pierre que dans l'expérience précédente, ayant 1 pouce de hauteur, 2 pouces de largeur, & 9 pouces de longueur de *g* en *D*, où j'ai ſuſpendu un poids *P*; ce poids s'eſt trouvé de 20 livres lorſque le ſolide a caſſé en *eg*. *III.ᵉ* Expérience. Fig. 3.

VI.

J'ai répété les mêmes épreuves ſur des briques de Provence d'une excellente cuite & d'un grain très-uni, j'ai trouvé que leur cohéſion, en les rompant par une force perpendiculaire au plan de rupture, conformément à la première expérience, étoit de 280 à 300 livres par pouces. J'ai trouvé encore qu'un mortier composé de quatre parties de ſable & trois de chaux, employé depuis deux ans, ſupportoit, perpendiculairement au plan de rupture, 50 livres par pouces. Cette dernière épreuve, faite à la Martinique ne peut point être généraliſée; la force du mortier varie quelquefois du double, & même du triple, ſuivant la nature du pays humide ou ſec, ſuivant les qualités du ſable, de la chaux, de la pierre employée dans le corps de la maçonnerie, ſuivant l'ancienneté de cette maçonnerie; l'on ne peut rien fixer, il faut dans chaque lieu des obſervations particulières.

V I I.

Remarques ſur la rupture des Corps.

Fig. 6. Si l'on ſuppoſe un ſolide $onKL$ dont les angles ſoient droits, alongé comme une poutre ordinaire, & fixé en on, de manière que les côtés de ce ſolide ſoient horizontaux & verticaux; ſi l'on ſuppoſe enſuite que ce ſolide eſt coupé par un plan vertical repréſenté par AD, perpendiculaire au côté $onKL$, & ſollicité par un poids φ, attaché à ſon extrémité en L; il eſt évident, en ne conſidérant qu'une face verticale de ce ſolide, les autres étant égales & parallèles, que tous les points de la ligne AD réſiſtent pour empêcher le poids φ de rompre le ſolide; que par conſéquent une partie ſupérieure AC de cette ligne fait effort par une traction dirigée ſuivant QP, tandis que la partie inférieure fait effort, par une preſſion dirigée ſuivant $Q'P'$. Si l'on décompoſe toutes les forces, ſoit de traction, ſoit de preſſion, ſuivant deux directions, l'une verticale & l'autre horizontale, exprimée par QM & PM; & ſi par tous les points M l'on fait paſſer une ligne $BMCe$, cette courbe ſera le lieu géométrique de tous les efforts perpendiculaires qu'éprouve la ligne AD. Ainſi, la tranche $ADKL$ doit être ſuppoſée ſollicitée par toutes les forces horizontales PM, par toutes les forces verticales MQ, & par la peſanteur du poids φ; par conſéquent, puiſqu'il y a équilibre, il faut, *art. 3*, que la ſomme des puiſſances horizontales ſoit nulle; que, par conſéquent, l'aire des tenſions ABC égale l'aire des preſſions Ced. Il faut de plus, par le même article, que la ſomme des forces verticales QM ſoit égale au poids φ; mais par les principes de Statique l'on a encore la ſomme des *momentum* autour du point G de toutes les forces, ſoit de traction, ſoit de preſſion, égale au *momentum* du poids φ autour du même point; ce qui donne l'équation $\int Pp \,.\, MP \,.\, CP = \varphi LD$. Nous avons donc, quel que ſoit le rapport entre la dilatation des élémens d'un ſolide & leur cohéſion, les trois conditions précédentes à remplir.

Je suppose, par exemple, que l'on veuille chercher le poids que peut supporter une pièce de bois parfaitement élastique; c'est-à-dire qui se comprime ou se dilate chargée dans la direction de sa longueur, proportionnellement à la force qui la comprime ou qui la dilate; que l'élément $ofnh$, qui touche le mur, représente une portion très-petite de la pièce de bois dans son état naturel; si l'on charge cette pièce de bois d'un poids φ, la partie supérieure de la ligne fh se portera en g, & la partie inférieure se portera en m; la ligne fh deviendra gm: mais comme, par hypothèse, les tensions, de même que les pressions, sont représentées par les parties $\pi\mu$ du triangle fge, il suit que le triangle de compression emh doit égaler le triangle de dilatation fge. Ainsi, si l'on nomme δ la tension du point f, représentée par fg, fe égalera $\frac{1}{2}fh$; l'on aura, pour le *momentum* du petit triangle de traction, $\frac{\delta ef^2}{3}$, qui, ajouté au *momentum* du petit triangle de compression, doit donner $\frac{\delta(fh)^2}{6} = \varphi n.L$, ou δfh, dans l'instant de rupture, exprime la résistance que l'adhérence opposeroit à un effort qui agiroit perpendiculairement à la ligne fh, en supposant cependant que les tractions MQ n'influent que très-peu sur la résistance des solides; ce qui est assez vrai, lorsque le bras de levier nL du poids φ est beaucoup plus grand que l'épaisseur fh.

Mais si l'on supposoit le solide, prêt à se rompre, composé de fibres roides, ou qui ne soient susceptibles ni de compression, ni d'alongement; si l'on supposoit encore que le corps se rompît en tournant autour du point h; pour lors, chaque point de l'épaisseur fh feroit un effort égal; le point h éprouveroit une pression égale à δfh, & le *momentum* du petit triangle de cohésion seroit $\frac{\delta(fh)^2}{2}$. Appliquons cette dernière hypothèse à nos expériences.

J'ai trouvé par la première expérience, qu'une surface de

Fig. 2. deux pouces de largeur ſur un pouce de hauteur, oppoſoit une réſiſtance égale à 430 livres. Dans la troiſième expérience j'ai les mêmes dimenſions, & de plus hL égale 9 pouces; par conſéquent, ſi la dernière hypothèſe étoit vraie, j'aurois dû trouver $P = \frac{430}{2.9}$, à peu-près 24 livres; mais l'expérience donne pour P, 20 livres; ainſi l'on ne peut pas ſuppoſer dans la rupture des pierres, ou que la roideur des fibres ſoit parfaite, ou que le point d'appui de rotation ſoit préciſément en h. Une remarque aſſez ſimple auroit fait prévoir ce réſultat, c'eſt qu'en prenant h pour point de rotation, il faudroit que ce point h ſupportât une preſſion finie, ſans que ſa cohéſion fut détruite, ce qui n'eſt pas poſſible, puiſque cette cohéſion eſt une quantité finie, pour une ſurface finie. Il faut donc, dans le cas qui précède celui de rupture, que cette force, porte en un point h', tel que l'adhérence de $h'q$, ſoit en état de ſupporter par ſa réſiſtance la preſſion $\delta fh'$, qu'éprouve la ligne hh', décompoſée ſuivant $h'q$. Nous donnerons dans la ſuite les moyens de déterminer l'angle q du triangle $h'hq$.

M. l'Abbé Boſſut, dans un excellent Mémoire ſur la figure des digues, ouvrage où l'on trouve réunie, à l'eſprit d'invention, la ſagacité du Phyſicien, & l'exactitude du Géomètre, paroît avoir diſtingué & fixé le premier la différence qui ſe trouve entre la rupture des bois & celle des pierres.

VIII.

Réſiſtance des Piliers de Maçonnerie.

Soit un pilier homogène de maçonnerie, que je ſuppoſe Fig. 5. d'abord quarré, chargé d'un poids P; l'on demande la direction de la ligne CM, ſuivant laquelle ce pilier ſe rompra, & la peſanteur du poids néceſſaire pour cette rupture.

Je ſuppoſe ici que l'adhérence oppoſe une égale réſiſtance, ſoit que la force ſoit dirigée parallèlement ou perpendiculairement au plan de rupture, conformément à la première & deuxième expérience. Je ſuppoſe encore le pilier d'une matière

matière homogène, dont la cohésion soit δ; soit prise une section quelconque CM, inclinée à l'horizon, & perpendiculaire au plan vertical $ABDM$, face de ce pilier. Si l'on suppose pour un instant l'adhérence de la partie supérieure $ABCM$ infinie, de même que celle de la partie inférieure CDM, il est clair que la masse de cette colonne tendroit à glisser le long de CM; & par conséquent, si les deux parties étoient unies par une force d'adhérence égale à la cohésion naturelle du pilier, pour rompre cette colonne, suivant CM, il faudroit que la pesanteur du poids P, décomposée suivant cette direction, fût égale, ou plus grande que l'adhérence de CM. Soit l'angle en $M \ldots x$, $DM \ldots a$, P le poids dont la pression représentée par ϕq, se décompose suivant les directions ϕr & rq, perpendiculaires & parallèles à la ligne de rupture. Si l'on néglige, pour simplifier, la pesanteur de la colonne, l'on aura $\delta CM = \frac{\delta a}{\text{cos. } x}$, & $rq = P \text{ sin. } x$; par conséquent, dans le cas d'équilibre, l'on trouve $P = \frac{\delta a a}{\text{sin. } x \,.\, \text{cos. } x}$; mais comme la colonne doit être en état de porter le poids P sans se rompre, quelle que soit la section CM, il faut que le poids P soit toujours plus petit que la quantité $\frac{\delta a a}{\text{sin. } x \text{ cos. } x}$, quelle que soit la valeur de x; ce qui aura lieu lorsque l'on déterminera P, tel qu'il soit un *minimum*, d'après l'équation $P = \frac{\delta a^2}{\text{sin. } x \,.\, \text{cos. } x}$; ce qui donne $dP = \frac{\delta a a \,[-dx\,(\text{cos. } x)^2 + dx\,(\text{sin. } x)^2]}{(\text{sin. } x \,.\, \text{cos. } x)^2}$, & par conséquent sin. $x =$ cos. x. Ainsi le plus grand poids que la colonne puisse supporter sans se rompre, égale $2\,\delta\,a\,a$, le double de la résistance qu'elle opposeroit à une force de traction, & l'angle de moindre résistance, ou de rupture, sera 45 degrés.

Nous avons supposé dans cette recherche, que la section représentée par CM étoit perpendiculaire au côté vertical

ABDM; mais l'on auroit trouvé les mêmes résultats pour une section quelconque, pourvu qu'elle eût eu la même inclinaison sur le plan horizontal; en remarquant que par la théorie des projections, les sections obliques d'un pilier sont à leur projection horizontale comme le rayon est au cosinus d'inclinaison de ces deux plans; ainsi, en nommant x le sinus d'inclinaison de ces deux plans, & A la surface de la base, égale ici à a^2, l'on aura, pour l'adhérence de la section oblique $\frac{\delta aa}{\text{cos.}\, x}$, & P sin. x, pour la force qui tend à faire couler la partie supérieure de la colonne sur le plan incliné qui lui sert de base, de quelque manière que soit situé le plan de section. Comme ces quantités sont précisément les mêmes que les précédentes, elles doivent, par conséquent, donner les mêmes résultats; d'où l'on peut conclure que, quelle que soit la figure de la base horizontale d'un pilier, si la surface de cette base est constante, sa force sera la même.

I X.

Nous n'avons point fait entrer, dans la solution précédentes, le frottement qui s'oppose à la rupture du pilier. Si l'on vouloit y avoir égard, en conservant les dénominations précédentes, l'on trouveroit, pour la pression du poids sur CM, P cos. x; & comme le frottement est proportionnel à la pression, il sera égal à $\frac{P\,\text{cos.}\, x}{n}$, n étant une quantité constante; la masse du pilier $ABCM$, pressé par le poids P, est donc retenue par la cohésion & par le frottement; ainsi, en augmentant le poids jusqu'à ce qu'il soit prêt à rompre le pilier, l'on aura $\frac{aa\delta}{\text{cos.}\, x} + \frac{P\,\text{cos.}\, x}{n} = P$ sin. x, & $P = \delta aa :$ $[\text{cos.}\, x\ (\text{sin.}\, x - \frac{\text{cos.}\, x}{n})]$. Il faut, par les principes qui précèdent, pour avoir le poids que le pilier peut porter sans se rompre, faire P un *minimum*, ce qui donne

$dx\,[\text{fin.}\,x\,(\text{fin.}\,x - \frac{\text{cof.}\,x}{n})] - dx\,\text{cof.}\,x\,(\text{cof.}\,x + \frac{\text{fin.}\,x}{n}) = 0$,

& par conféquent $(\text{cof.}\,x)^2 + \frac{2\,\text{fin.}\,x\,\text{cof.}\,x}{n} = (\text{fin.}\,x)^2$;

d'où l'on tire $\text{cof.}\,x = \text{fin.}\,x\,[\sqrt{(1 + \frac{1}{nn})} - \frac{1}{n}]$;

d'où $\text{tang.}\,x = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{nn})} - \frac{1}{n}}$.

Si le pilier étoit de brique, l'on auroit *(art. 4)* $\frac{1}{n} = \frac{3}{4}$. $\text{tang.}\,x = 2$, $\text{fin.}\,x = 2\,\text{cof.}\,x$; par conféquent, $\text{cof.}\,x = (\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}}$, & $P = \frac{\delta aa}{\text{cof.}\,x\,(2\,\text{cof.}\,x - \frac{3}{4}\,\text{cof.}\,x)} = 4\delta aa$, l'angle en M fera de $63^d\ 26'$; ainfi, la force qu'il faudroit pour rompre une colonne de brique par une force preffante, feroit quadruple de celle qu'il faudroit pour rompre cette même colonne par une force de traction.

M. Muffchenbroëk *(Effai de Phyfique, traduction françoife, vol. I, page 354)* a trouvé qu'un pilier quarré de brique, de 11 pouces & demi de longueur fur 5 lignes de côté, a été rompu par un fardeau de 195 livres. Dans l'expérience de M. Muffchenbroëk, les côtés étant $\frac{5}{12}$ de pouce, la coupe horizontale étoit $\frac{25}{144}$ d'un pouce quarré. Or, par l'*art. 6*, nous avons trouvé qu'un pouce quarré de brique fupporte, perpendiculairement au plan de rupture, 300 livres; ainfi, dans cette expérience $\delta aa = 300^l : \frac{25}{144} = 52^l$, qui exprime la force de traction; mais comme $P = 4\,\delta\,a^2$, il fuit de notre théorie & de nos épreuves, que ce Phyficien auroit dû trouver 208 livres, quantité peu différente de 195 livres, réfultat de fon expérience.

Au refte, je fuis obligé d'avertir que la manière dont M. Muffchenbroëk détermine la force d'un pilier de maçonnerie, n'a aucun rapport avec celle que je viens d'employer. Un pilier, preffé par une force dirigée fuivant fa longueur, ne fe rompt, dit ce Phyficien célèbre, que parce qu'il commence à fe courber; autrement il fupporteroit toute ſorte de poids. En partant de ce principe, il détermine la force des piliers quarrés, en raiſon inverſe du quarré de leur longueur, & triplée de leurs côtés; en ſorte que ſi le pilier dont nous venons de calculer la force n'avoit eu que la moitié de ſa première longueur, il auroit ſupporté un poids quadruple du premier, c'eſt-à-dire, 832 livres; au lieu que je crois avoir démontré qu'il n'auroit guère ſupporté que le même poids de 208 livres.

L'on conclud de la formule, que les forces des piliers homogènes ſont entr'elles comme les ſections horizontales.

L'on détermineroit, par les mêmes principes, l'angle de rupture d'une colonne incompreſſible, qui ſeroit preſſée par une force inclinée à ſa baſe horizontale; pourvu que la direction de cette force tombât dans cette baſe; car ſi elle tomboit en dehors de cette baſe, il y auroit quelques autres conſidérations qui rendroient la ſolution de ce Problème un peu plus difficile.

L'on trouve auſſi, par les principes précédens, la hauteur où l'on peut élever une tour ſans qu'elle s'écraſe ſous ſon propre poids. Suppoſons, pour ſimplifier, que cette hauteur eſt beaucoup plus grande que la largeur; pour pouvoir négliger le petit priſme *CDM,* il faudra ſubſtituer dans les formules, à la place de la quantité *P,* la maſſe d'une tour qui auroit le même poids: ſuppoſons-là, par exemple, conſtruite en briques; le pied cube de brique peſant à peu-près 144 livres, un petit priſme, qui auroit un pouce de baſe, ſur un pied de hauteur, pèſeroit une livre; ainſi, comme une baſe d'un pouce peut ſupporter une force de traction égale à 300 livres, & une force de preſſion double, lorſque l'on néglige le frottement, il eſt clair qu'en ſubſtituant à la tour une maſſe de petits priſmes, d'un pouce de baſe, ſur 600 pieds de hauteur, il ſeroit auſſi ſoutenu par la cohérence. Si l'on avoit égard au frottement, l'on pourroit, par les mêmes principes, élever cette tour juſqu'à 1200 pieds de hauteur: ſi à la place de la tour on ſubſtituoit une pyramide, elle pourroit s'élever à une hauteur triple.

Si cette tour étoit portée sur plusieurs piliers, la hauteur à laquelle on pourroit l'élever, seroit en raison directe de la section horizontale de ces piliers; en sorte que si la section de ces piliers étoit, par exemple, le sixième de la section horizontale de la tour, elle ne pourroit s'élever au-dessus des colonnes qu'à 100 pieds de hauteur, en négligeant le frottement, & à 200 pieds en y ayant égard. L'on néglige ici le poids des piliers, il seroit facile d'y avoir égard.

Lorsque plusieurs voûtes prennent leur naissance sur le même pilier, s'arc-boutent & se soutiennent mutuellement, quant à la pression horizontale; la résultante de leurs forces étant verticale, & dirigée suivant l'axe du pilier, l'on déterminera facilement par cette méthode, la grosseur d'un pilier. Toutes ces recherches sont simples, d'un usage journalier; il seroit facile de les étendre, mais je n'ai voulu ici qu'en établir les principes.

IX.

De la pression des terres, & des revêtemens.

Si l'on suppose qu'un triangle CBa rectangle, solide & pesant, est soutenu sur la ligne Ba par une force A appliquée en F, perpendiculairement à la verticale CB; qu'en même-temps il est sollicité par sa pesanteur φ, & retenu sur la ligne Ba, par sa cohésion avec cette ligne, & par le frottement. Fig. 7.

Soit fait $CB \ldots a$, $Ca \ldots x$; $\delta(aa + xx)^{\frac{1}{2}}$ exprimera l'adhérence de la ligne aB; φ, pesanteur du triangle CBa, égalera $\frac{gax}{2}$, où g exprime la densité du triangle.

Si l'on décompose la force A & la force φ suivant deux directions, l'une parallèle à la ligne Ba, l'autre qui lui soit perpendiculaire, les triangles $\varphi G\delta$. $F\pi p$, qui expriment ces forces décomposées, seront semblables au triangle CaB; l'on aura donc pour ces forces les expressions suivantes,

φG force perpendiculaire à aB dépendante de $\varphi \ldots \ldots \varphi x : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

$G\delta$ force parallèle à aB dépendante de $\varphi \ldots \ldots \ldots \varphi a : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

$F\pi$ force perpendiculaire à aB dépendante de $A \ldots \ldots Aa : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

πp force parallèle à aB dépendante de $A \ldots \ldots \ldots Ax : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$.

Si $\frac{1}{n}$ exprime le rapport conſtant du frottement à la preſſion, l'on aura l'effort que fait le triangle pour couler ſur aB, exprimé par $[\varphi a - Ax - \frac{\varphi x - Aa}{n} - \delta(aa + xx)] : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$; dans le cas d'équilibre, cette expreſſion ſera égale à zéro; d'où l'on tire

$$A = [\varphi(a - \frac{x}{n}) - \delta(aa + xx)] : (x + \frac{a}{n}).$$

Mais ſi l'on ſuppoſe que la force appliquée en F, vienne à augmenter, au point qu'elle ſoit prête à mettre le même triangle en mouvement ſuivant la direction Ba; pour lors, en nommant A' cette force, l'on aura

$$[A'x - \varphi a - \frac{\varphi x - Aa}{n} - \delta(aa + xx)] : (aa + xx)^{\frac{1}{2}},$$

pour l'effort ſuivant Ba; d'où l'on tire, dans le cas d'équilibre,

$$A' = [\varphi(a + \frac{x}{n}) + \delta(aa + xx)] : (x - \frac{a}{n}),$$

quantité qui ſeroit infinie ſi x égaloit $\frac{a}{n}$.

L'on peut remarquer, d'après les deux expreſſions précédentes, que la force A ſera toujours plus petite que la quantité $\frac{ga^2}{2}$, & que la force A' ſera toujours plus grande que cette quantité qui exprime la preſſion, lorſque l'adhérence & le frottement deviennent nuls, ou lorſque le triangle eſt ſuppoſé fluide.

Il eſt donc démontré que lorſque la cohéſion & le frottement contribuent à l'état de repos du triangle, que les limites de la force que l'on peut appliquer en F, perpendiculairement à CB, ſans mettre le triangle en mouvement, ſeront compriſes entre A & A'.

X.

Mais ſi l'on remarque, comme on l'a déjà fait dans l'introduction, que dans une maſſe de terres homogènes l'adhérence eſt égale dans tous les points, il faut, pour ſoutenir cette maſſe indéfinie, que non-ſeulement la force *A* puiſſe ſupporter un triangle donné *CBa*, mais même parmi toutes les ſurfaces *CBeg*, terminées par une ligne courbe quelconque *Beg*, celle qui, ſoutenue par ſon adhérence & ſon frottement, & ſollicitée par ſa peſanteur, produiroit la plus grande preſſion; car, d'après cette ſuppoſition, il ſeroit évident que ſi l'on appliquoit en *F* une force qui ne différât de celle qui ſeroit ſuffiſante pour ſoutenir la ſurface de la plus grande preſſion, que d'une quantité très-petite, la maſſe des terres ne pourroit ſe diviſer que ſuivant cette ligne, toutes les autres parties reſtant unies par la cohéſion & le frottement. Il faut donc, pour avoir une force *A* ſuffiſante pour ſoutenir toute la maſſe, chercher parmi toutes les ſurfaces *CBeg*, celle dont la preſſion ſur la ligne *CB* eſt un *maximum*. De même, ſi l'on vouloit déterminer la plus grande force qui puiſſe agir en *F*, ſans troubler l'état de repos, il faudroit chercher une autre courbe *Be'g'*, telle que la force *A'* ſuffiſante pour faire couler la ſurface *CBe'g* ſuivant *Be'g'* ſoit un *minimum*, & les limites de la force horizontale, que l'on peut appliquer en *F*, ſans mettre le fluide en mouvement, ſeront compriſes entre les limites *A* & *A'*, où *A* ſera un *maximum*, & *A'* un *minimum*.

Ainſi, il réſulte que la différence entre la preſſion des fluides dont le frottement & la cohéſion ſont nuls, & de ceux où ces quantités ne doivent point être négligées, conſiſte en ce que dans les premiers, le côté *cB* du vaſe qui les contient ne peut être ſoutenu que par une ſeule force, au lieu que dans les autres, il y a une infinité de forces contenues entre les limites *A* & *A'*, qui ne troubleront point l'état de repos.

Comme il ne s'agit ici que de déterminer la moindre force horizontale que puiſſe éprouver le revêtement qui ſoutient une maſſe de terre, ſans que l'équilibre ſoit rompu, je ne chercherai que la force *A*.

Je ſuppoſerai d'abord que la courbe qui produit la plus grande preſſion eſt une ligne droite ; ce qui eſt conforme à l'expérience, qui donne une ſurface très-approchante de la triangulaire, pour celle qui ſe détache lorſque les revêtemens ſont ébranlés par le poids des terres.

D'après cette ſuppoſition & les remarques précédentes, il faut donc, parmi tous les triangles $CB'a$, qui ont pour côté invariable CB, & l'angle C droit, chercher celui qui demande la plus grande preſſion A pour l'empêcher de gliſſer le long de aB. Ainſi, comme nous avons pour un triangle quelconque, $A = \frac{\frac{ax}{2}\left(a - \frac{x}{n} - \delta\right)(aa + xx)}{\left(x + \frac{a}{n}\right)}$, l'on aura pour le triangle de la plus grande preſſion, par les règles *de maximis & minimis*. $\frac{dA}{dx} = \frac{\left(\frac{ga}{2n} + \delta\right).\left(aa - \frac{2ax}{n} - xx\right)}{\left(x + \frac{a}{n}\right)^2} = 0$, & par conſéquent $x = -\frac{a}{n} + a\sqrt{\left(1 + \frac{1}{nn}\right)}$. Subſtituant cette valeur de x dans l'expreſſion de A, l'on aura $A = ma^2 - \delta la$, m & l étant des coëfficiens conſtans, où il n'entre que des puiſſances de n; cette force A ſera ſuffiſante pour ſoutenir une maſſe indéfinie $CBlg$.

L'on peut conclure de la formule précédente, que l'adhérence n'influe point ſur la valeur de x, ou que les dimenſions du triangle qui produit la plus grande preſſion, dépendent abſolument du frottement.

Si le frottement eſt nul, quelle que ſoit l'adhérence, le triangle de la plus grande preſſion ſera iſoſcèle, ou celui dont l'angle ſera de 45 degrés.

XI.

Dans la formule précédente, $A = ma^2 - \delta la$, ſi l'on fait a variable, l'on aura $dA = da(2ma - \delta l)$ qui exprimera la différence des preſſions des ſurfaces indéterminés CBl, $CB'L$; & puiſque la verticale CB ne peut pas

pas porter une moindre force que A, la ligne BB' ne pourra point être ſuppoſée preſſée d'une moindre force que dA; ainſi le *momentum* élémentaire de la force A autour du point E, baſe du revêtement, en nommant b la hauteur totale CE, ſera $(b - a)(2ma - \delta l)\, da$, & intégrant, l'on aura pour le *momentum* total autour du point E $\frac{m - b^3}{3} - \frac{\delta lbb}{2}$. Il faudra égaler cette quantité au *momentum* de la peſanteur du revêtement pour en déterminer les dimenſions.

Quant à la forme & aux dimenſions des revêtemens, l'on n'a rien de mieux à conſulter dans ce genre que *les Recherches ſur la figure des digues*, ouvrage que j'ai déjà cité.

EXEMPLE.

Si l'on ſuppoſe que le frottement ſoit égal à la preſſion, comme dans les terres qui, abandonnées à elles-mêmes, prennent 45 degrés de talus; ſi l'on ſuppoſe l'adhérence nulle; ce qui a lieu dans les terres nouvellement remuées: pour lors on aura $x = -\frac{a}{n} + a\sqrt{(1 + \frac{1}{nn})} = \frac{4}{10}a$, & $A = \frac{3}{35}a^2$; m ſera donc égale à $\frac{3}{35}$, & le *momentum* total autour de G ſera $\frac{mb^3}{3} = \frac{b^3}{35}$ *; ainſi, ſi le mur qui ſoutient les terres étoit ſans talus, que ſon épaiſſeur fut c, & que ſa denſité fut la même que celle des terres, l'on auroit $c = \frac{24b}{100}$, un peu moindre que le quart de la hauteur.

Mais ſi le revêtement avoit $\frac{1}{6}$ de talus, en nommant c ſon épaiſſeur au cordon CD, l'on aura, dans le cas d'équilibre,

* Dans cet exemple, comme dans ceux qui ſuivent, l'on ſuppoſe que le revêtement $DCEG$ eſt ſolide & indiviſible; que ſon frottement, exprimé par une fraction de ſa maſſe, eſt plus grand que la pouſſée horizontale A; l'on cherche donc ſeulement quelles doivent être ſes dimenſions, pour qu'il ne puiſſe point tourner autour de ſon point G.

la formule $\frac{b^3}{35} = cb\left(\frac{c}{2} + \frac{b}{6}\right) + \frac{2b^3}{12.3.6}$; d'où l'on tire à peu-près $c = \frac{b}{10}$. Si l'on vouloit augmenter la maſſe de la maçonnerie d'un quart en ſus de celle qui ſeroit néceſſaire pour l'équilibre, l'on trouveroit $c = \frac{b}{7}$; en ſorte que ſi l'on avoit 35 pieds de hauteur de terres à ſoutenir, il faudroit faire $CD = 5$ pieds; ce qui donne les dimenſions uſitées dans ce cas par la pratique. Je crois la quantité $c = \frac{b}{7}$ ſuffiſante dans l'exécution; d'autant plus, qu'outre l'augmentation de ſolidité, d'un quart en ſus de celle qu'exige l'équilibre, l'on a négligé le frottement qu'éprouve le revêtement, lorſque dans l'inſtant de rupture les terres ſont prêtes à couler le long de GE, ce qui diminue en même-temps la force A & augmente le *momentum* du revêtement.

M. le maréchal de Vauban, dans preſque toutes les places qu'il a fait conſtruire, a donné 5 pieds de largeur au cordon, ſur $\frac{1}{5}$ de talud. Comme les revêtemens conſtruits par cet homme célèbre, paſſent rarement 40 pieds, ſa pratique ſe trouve dans ce cas aſſez d'accord avec notre dernière formule. Il eſt vrai cependant que M. de Vauban ajoute des contre forts à ſes murs; mais cette augmentation de ſolidité ne doit point être regardée comme ſuperflue dans les fortifications, dont les enveloppes ne doivent point être culbultées par le premier coup de canon.

Il réſulte de cette théorie, que dans les terres homogènes, nouvellement remuées, les épaiſſeurs des murs qui les ſoutiennent, meſurées au cordon CD, ſont comme les hauteurs CE; ce qui paroît devoir diminuer l'épaiſſeur que l'on donne ordinairement aux revêtemens qui n'ont que quinze à vingt pieds de hauteur.

XII.

Dans les terres dont la cohéſion eſt donnée, l'on tire de la formule $A = ma^2 - \delta la$, qui exprime la pression des terres, un résultat assez utile dans leur excavation. Je suppose qu'il s'agit de déterminer jusqu'à quelle profondeur l'on peut creuser un fossé, en coupant les terres suivant un plan vertical, sans qu'elles s'éboulent; car, puisque l'on a, en général, $A = ma^2 - \delta la$, si l'on fait $A = 0$, l'on aura $a = \frac{\delta l}{m}$, qui exprimera cette hauteur.

Par des principes analogues, si la hauteur de l'excavation étoit donnée, l'on trouveroit l'angle sous lequel il faudroit couper les terres pour qu'elles se soutinssent par leur propre cohésion.

XIII.

Si la masse de terre caB étoit chargée d'un poids P, il faudroit, dans les formules précédentes, à la place de φ *(art. 10)* substituer $P + \frac{ax}{2}$, & l'on aura

$$A = \frac{(\frac{gax}{2} + P).(a - \frac{x}{n}) - \delta(aa + xx)}{\frac{a}{n} + x},$$

d'où il résulte

$$x + \frac{a}{n} = \sqrt{[aa(1 + \frac{1}{nn}) - Pa(\frac{1}{nn} + 1):(\frac{ga}{2n} + \delta)]}.$$

Pour avoir les dimensions des revêtemens, il faudra substituer d'abord cette valeur de x dans la formule qui exprime A, & faire le reste comme dans l'*article 11*.

XIV.

Jusqu'ici nous n'avons point eu égard au frottement qu'éprouve le triangle CBa, en coulant contre CB dans l'instant de rupture; mais pour peu que l'on y fasse attention l'on voit que ce triangle est non-seulement retenu par son frottement sur Ba, mais encore par le frottement qu'il éprouve en glissant le long de cB, de la part du revêtement; ce dernier frottement pourra être exprimé par $\frac{A}{\nu}$, où $\frac{1}{\nu}$

marque le rapport du frottement & de la pression, lorsque les terres font effort pour couler sur la maçonnerie. Or, dans le cas d'équilibre, le frottement sur CB, équivaut à une force dirigée suivant BC; il faut donc, dans la formule qui donne la valeur de A (*art. 10*), substituer à la place de φ la quantité $\left(\frac{ax}{2} - \frac{A}{\nu}\right)$, ce qui donne

$$A = \frac{\left(\frac{ax}{2} - \frac{A}{\nu}\right)\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{x + \frac{a}{n}} = \frac{\frac{ax}{2}\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{a\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\nu}\right) + x\left(1 - \frac{1}{n\nu}\right)};$$

d'où l'on tirera, en supposant que A est un *maximum*, & en faisant $\frac{1}{n} + \frac{1}{\nu} = m$, & $1 - \frac{1}{n\nu} = \mu$,

$$x = -\frac{m}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{\frac{n}{\mu}\left(\frac{mga^3}{2} + \delta\mu a^2\right)}{\frac{ga}{2} + n\delta} + \frac{mma^2}{\mu\mu}\right)}.$$

Substituant cette valeur de x dans l'expression de A, & opérant comme ci-dessus, l'on déterminera les dimensions des revêtemens.

EXEMPLE.

Si l'adhérence δ est supposée nulle, comme dans les terres nouvellement remuées; si le frottement est égal à la pression, comme dans toutes celles qui prennent 45^d de talus naturel, abandonnées à elles-mêmes; si n est supposé égal à ν, l'on trouvera pour lors $A = \frac{gx}{4}(a - x)$, & $x = \frac{a}{2}$, l'angle $CBa = 36^d\ 34'$, & $A = \frac{ga^2}{16}$, le *momentum* total de la pression des terres autour du point G sera $\frac{b^3}{3 \cdot 16}$; d'où l'on tireroit, pour un mur de terrasse sans talus, dont l'épaisseur seroit c, en ayant égard à la réaction du frottement qui contribue à augmenter le *momentum* de la résistance du revêtement, de la quantité $\frac{cb^2}{16}$, l'équation

$$\frac{b^3}{3.16} = \frac{ccb}{2} + \frac{cb^2}{16};$$

& par conséquent $C = \frac{15}{100}\ b$, à peu-près; c'est-à-dire qu'un mur de trois pieds de largeur seroit, dans cette hypothèse, en équilibre avec la poussée d'une terrasse de vingt pieds de hauteur.

L'on appliqueroit avec la même facilité les hypothèses de cet exemple à un revêtement qui auroit $\frac{1}{6}$ de talus, comme on le pratique ordinairement dans les murs de terrasse; mais les épaisseurs que donneroit cette application seroient beaucoup plus petites que celle que la pratique semble avoir fixé. Plusieurs causes en effet concourent à faire augmenter les dimensions des revêtemens; en voici quelques-unes.

1.° Le frottement des terres contre la maçonnerie n'est pas aussi fort que celui des terres sur elles-mêmes.

2.° Souvent les eaux filtrant à travers les terres, se rassemblent entre les terres & la maçonnerie & forment des napes d'eau qui substituent la pression d'un fluide sans frottement à la pression des terres; quoique, pour obvier à cet inconvénient, l'on pratique derrière les revêtemens des tuyaux verticaux & des égouts au pied de ces mêmes revêtemens, pour laisser écouler les eaux, ces égouts s'engorgent, ou par les terres que les eaux entraînent, ou par la gelée, & deviennent quelquefois inutiles.

3.° L'humidité change encore non-seulement le poids des terres, mais encore leur frottement. Je puis assurer avoir vu des terres savonneuses, qui se soutenant d'elles-mêmes, lorsqu'elles étoient sèches, sur une inclinaison de 45 degrés, avoient de la peine, quand elles étoient mouillées, à se soutenir sur une inclinaison de 60 à 70 degrés. Enfin, il faut pour que l'on puisse compter sur les dimensions fixées par les formules, que l'eau ne pénètre point les terres dont on cherche la pression, ou qu'en les pénétrant, elle en augmente peu le volume. Cette augmentation de volume que l'humidité procure aux terres, & dont nous avons un exemple dans les lézardes que la ſéchereſſe occaſionne à la ſurface de nos campagnes, produit contre les revêtemens une preſſion que l'expérience ſeule peut déterminer.

Ces remarques ſont encore indépendantes de la bonté de la maçonnerie, qu'il faut toujours laiſſer ſécher avec ſoin avant de la charger: elles ſont encore indépendantes de la gelée, ennemi ſans contredit le plus dangereux dont les maçonneries aient à craindre les effets; car, outre l'augmentation de preſſion que la gelée produit dans les terres humides, par l'augmentation de volume, outre les engorgemens des tuyaux d'écoulement, l'on peut être ſûr que tout mur qui éprouvera de fortes gelées avant d'être ſec, perdra néceſſairement la plus grande partie de ſon adhérence, & ſera incapable de réſiſtance.

Malgré toutes ces remarques, qui paroiſſent conduire à conclure qu'il faut des dimenſions particulières aux revêtemens, ſuivant la nature des remblais dont ils éprouvent la preſſion; que dans les pays ſecs & chauds il y a moins d'inconvénient à diminuer les murs de terraſſe, que dans les pays humides & froids; je crois cependant que dans toutes les eſpèces de terres l'on pourra ſans danger fixer les revêtemens à $\frac{1}{6}$ de talus, ſur le ſeptième de la hauteur, pour l'épaiſſeur au cordon (conformément à l'*article 11*).

X V.

De la ſurface de plus grande preſſion dans les fluides cohérens.

Juſqu'ici nous avons ſuppoſé que la ſurface qui produit la plus grande preſſion étoit une ſurface triangulaire; la ſimplicité des réſultats que donne cette ſuppoſition, la facilité de leur application à la pratique, le deſir d'être utile & entendu des Artiſtes, ſont les raiſons qui nous ont décidé; mais ſi l'on vouloit déterminer d'une manière exacte la ſurface courbe qui produit la plus grande pression: voici, je crois comme on pourroit s'y prendre.

Que CBg, représente la surface courbe qui produit la plus grande pression sur CB, le frottement des terres & la cohésion étant supposés les mêmes que ceux du fluide indéfini $gCBl$. Si l'on prend un portion de la surface CBg, comme PMg, il est évident que cette portion PMg sera de toutes les surfaces que l'on peut construire sur PM, celle qui produiroit sur cette ligne la plus grande pression; mais pour avoir la valeur de cette pression l'on verra que dans le moment où l'équilibre est prêt à se rompre, cette surface PGM est soutenue par son frottement & sa cohésion sur gM, son frottement & sa cohésion sur PM, & sollicitée par sa pesanteur φ. Ce que l'on dit par rapport à la portion PMg, on peut le dire par rapport à la portion $P'M'g$. Or, comme dans l'instant de rupture, toute la masse est en équilibre il s'ensuit qu'une portion $PMP'M'$, soit élémentaire ou non, sollicitée par sa pesanteur, & retenue par ses frottemens, sa cohésion, & les différentes pressions qu'elle éprouve de la part du fluide qui l'entoure, doit aussi être en équilibre; mais pour peu que l'on y fasse attention l'on remarquera qu'une masse PMg ne peut être retenue par son adhérence & son frottement qui l'empêche de glisser le long de PM, sans que le même frottement & la même adhérence n'agisse par sa réaction sur la masse $CBPM$, dans le sens contraire. Ainsi en nommant A la pression horizontale qu'éprouve la ligne PM, & A' celle qu'éprouve la ligne PM'; un élément quelconque $PMP'M'$, qui doit être en équilibre, sera retenu suivant une ligne horizontale Fe par la pression $(A' - A)$, sera sollicité suivant la ligne verticale PM, par la réaction du frottement exprimé par $\frac{A}{n}$, par la réaction de l'adhérence δPM, & retenu par le frottement & la cohésion de $P'M'$, par le frottement & la cohésion de MM'; l'on peut donc regarder cette surface élémentaire $PP'MM'$, comme un triangle $MM'q$, chargé du poids de l'élément sollicité par

Fig. 8.

toutes les forces verticales que nous venons de détailler. Soit fait

$gP \ldots\ldots\ldots\ldots x \qquad PM \ldots\ldots\ldots\ldots y,$
$gP' \ldots\ldots\ldots\ldots x' \qquad P'M' \ldots\ldots\ldots\ldots y',$
$gP'' \ldots\ldots\ldots\ldots x'' \qquad P''M'' \ldots\ldots\ldots\ldots y''.$

Nous avons trouvé *(art. 9 & 10)* qu'une surface triangulaire dont a seroit le côté vertical & x le côté horizontal, sollicitée par une puissance verticale φ, donneroit la pression horizontale $A = \frac{\varphi(a - \frac{x}{n})}{x + \frac{a}{n}} - \frac{\delta(aa + xx)}{x + \frac{a}{n}}$; en comparant cette équation avec celle qui auroit lieu pour l'élément $PP'MM'$, l'on trouvera que A représente $(A' - A)$; que $\varphi = y.(x' - x) + \frac{A - A'}{n} + \delta(y - y')$; que $a = (y' - y)$ & $x = (x' - x)$; ainsi l'équation qui exprime l'état d'équilibre deviendra

$$(A' - A) = \left[y(x' - x) + \frac{A - A'}{n} + \delta(y - y')\right] \left(\frac{y' - y - (\frac{x' - x}{n})}{x' - x + \frac{y' - y}{n}}\right).$$

Supposons, pour simplifier, $\delta = 0$, ce qui a lieu pour les terres nouvellement remuées, l'on aura

$$A' - A = \frac{y(x' - x)(y' - y) - (\frac{x' - x}{n})}{\frac{2(y' - y)}{n} + (x' - x)(1 - \frac{1}{nn})}.$$

Par le même raisonnement, l'on trouvera

$$A'' - A' = \frac{y'(x'' - x')(y'' - y' - \frac{(x'' - x')}{n})}{\frac{2(y'' - y')}{n} + (x'' - x')(1 - \frac{1}{nn})};$$

& par conséquent, en ajoutant ensemble ces deux équations, l'on aura

$$A'' - A = \frac{y(x' - x)(y' - y - \frac{(x' - x)}{n})}{\frac{2(y' - y)}{n} + (x' - x)(1 - \frac{1}{nn})} + \frac{y'(x'' - x')(y'' - y' - \frac{(x'' - x')}{n})}{\frac{2(y'' - y')}{n} + (x'' - x')(1 - \frac{1}{nn})};$$

mais

mais puisque la pression horizontale de la surface PMg doit être un *maximum*, de même que la pression horizontale de la surface $P''M''g$, il suit que les quantités y, y', y'' & x, x'' restant constantes, x', seul variable, doit être tel qu'il rende $A'' - A'$ un *maximum;* ce qui donne, en différentiant & faisant $y' - y = y'' - y' = dy$,

$$\frac{-A)}{.} = \frac{y(dy - \frac{(x'-x)}{n})}{\frac{2dy}{n} + (x'-x)(1-\frac{1}{nn})} - \frac{\frac{y}{n}(x'-x)}{\frac{2dy}{n} + (x'-x)(1-\frac{nn}{1})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})y(x'-x)(dy-\frac{(x'-x)}{n})}{[\frac{2dy}{n} + (x-x')(x-\frac{1}{nn})]^2}$$

$$- \frac{y'(dy - \frac{(x''-x)}{n}}{\frac{2dy}{n} + (x''-x')(1-\frac{1}{nn})} + \frac{\frac{y'}{n}(x''-x')}{\frac{2dy}{n} + (x''-x')(1-\frac{1}{nn})} + \frac{(1-\frac{1}{nn})y'(x''-x')(dy-\frac{(x''-x')}{n}}{[\frac{2dy}{n} + (x''-x)(1-\frac{1}{nn})]^2}$$

mais comme les différentes parties correspondantes de cette équation sont des fonctions consécutives semblables, il suit, en intégrant & substituant dx à la place de $x' - x$,

$$B = \frac{y(dy - \frac{dx}{n})}{2(dy + dx(1-\frac{1}{nn})} - \frac{y\frac{dx}{n}}{\frac{2dy}{n} + dx(1-\frac{1}{nn})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})y\,dx(dy-\frac{dx}{n})}{[\frac{2dy}{n} + dx(1-\frac{1}{nn})]^2}.$$

Si dans cette équation l'on fait $z\,dy = dx$, l'on trouvera

$$\frac{y(1-\frac{z}{n})}{\frac{2}{n} + z(1-\frac{1}{nn})} - \frac{y\frac{z}{n}}{\frac{2}{n} + z(1-\frac{1}{nn})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})yz(1-\frac{z}{n})}{[\frac{2}{n} + z(1-\frac{1}{nn})]^2} = B.$$

Comme dans cette équation réduite, z n'est élevé qu'à la deuxième puissance, elle aura la forme suivante,

$$zz + \frac{F' + G'y}{F + Gy}\,z + \frac{F'' + G''y}{F + Gy} = 0,$$

& par conséquent,

$$z + \frac{F' + G'y}{2(F + Gy)} = \pm\left[\left(\frac{F' + G'y}{2(F + Gy)}\right)^2 - \frac{F'' + G''y}{F + Gy}\right]^{\frac{1}{2}}; F, F, F'',$$

de même que GG' & G'' sont des coëfficiens constans.

Si l'on avoit eu égard à l'adhérence, l'on auroit eu précisément une équation de la même forme, & l'on n'y trouveroit de différence que dans les coëfficiens.

L'on peut conclure de cette dernière recherche, que si un fluide, dont la cohésion & le frottement seroient donnés, étoit contenu dans un vase CBg', la pression contre la paroi CB seroit la même, quelle que fût la figure de Bg; si l'on pouvoit y inscrire la surface courbe Beg, qui produiroit un *maximum* dans une masse de fluide indéfinie; mais si la courbe Beg, qui produit la plus grande pression, étoit extérieure au vase; pour lors, il faudroit déterminer, de toutes les surfaces que l'on pouvoit inscrire de ce vase, celle qui produiroit la plus grande pression.

Cependant, il faut remarquer que si l'adhérence & le frottement du vase & du fluide étoient plus petits que ceux du fluide avec lui-même; pour lors, il se pourroit que la pression du fluide contenu dans le vase fut plus grande que celle du fluide indéfini. Le développement de ces remarques, de même que l'application des formules qui précèdent, demandent un travail exprès, & m'éloigneroit de la simplicité que je me suis prescrite dans ce Mémoire; j'espère cependant pouvoir une autre fois traiter cette matière dans la théorie des mines, qui, dépendant en partie des principes que je viens d'expliquer, demande encore la solution de quelques Problèmes assez curieux.

X V I.

Des Voûtes.

Fig. 9. Soit la courbe FAD, décrite sur l'axe FD; soit une seconde courbe fad, décrite extérieurement à la première; soit divisée la courbe FAM en une infinité de parties MM', & de chaque point M, soit tirée la ligne MM', perpendiculaire à la courbe intérieure en M, où formant avec l'élément MM' un angle suivant une loi donnée; si l'on suppose les deux lignes FAD, fad, telles qu'une portion quelconque $AaMm$, sollicitée par la pesanteur, & retenue par la cohésion & le frottement, soit en équilibre, l'on aura formé le profil d'une voûte. Si l'on suppose ensuite que ce profil se meut, parallèlement à lui-même, & forme une enveloppe solide,

comprise entre le tracé du mouvement des deux courbes, l'équilibre, démontré par rapport à ce profil, sera encore vrai, par rapport à cette enveloppe; & la voûte ainsi formée, sera celle que l'on appelle une *voûte en berceau.* C'est celle dont je me suis occupé dans les recherches qui suivent. Les principes que l'on y explique pourront s'appliquer à toutes les autres espèces de voûtes.

XVII.

Des Voûtes dont les joints n'ont ni frottement, ni cohésion.

Soit aB le profil d'une voûte, d'une épaisseur infiniment petite, dont les joints soient perpendiculaires à la courbe aB; l'on demande la figure de cette voûte, sollicitée par des puissances quelconques. Fig. 10.

Que toutes les forces qui agissent sur la portion aM soient décomposées suivant deux directions, l'une verticale, & l'autre horizontale; que la résultante de toutes les forces verticales soit $Q\zeta$, que je nomme ϕ; que la résultante de toutes les forces horizontales soit $Q\phi$, que je nomme π; soit de plus $aP \ldots y$, $PM \ldots x$, $Mq \ldots dx$, $qM' \ldots dy$, il est évident *(art. 1.er)* que la résultante de toutes les forces qui agissent sur la portion aM doit être perpendiculaire au joint en M; & par l'*article 3*, que toutes les forces qui sollicitent cette partie de voûte, étant décomposées suivant deux directions, l'une verticale & l'autre horizontale, perpendiculaires l'une à l'autre; la somme des forces, suivant chaque direction doit être nulle; ainsi, si l'on nomme P la pression du joint en M, & que l'on décompose cettte pression en deux forces, l'une horizontale $\frac{Pdx}{ds}$, & l'autre verticale $\frac{Pdy}{ds}$, l'on aura les deux équations suivantes $\frac{Pdx}{ds} = \pi$, & $\frac{Pdy}{ds} = \phi$, & par conséquent, en divisant l'une par l'autre, pour faire disparoître P, l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{\pi}{\phi}$;

équation qui exprime la figure d'une voûte, ſollicitée par des puiſſances quelconques.

Cette formule ſe trouve exactement la même que celle qui a été déterminée par M. Euler *(dans le troiſième volume de l'Académie de Péterſbourg)* pour la figure d'une chaîne, ſollicitée par des puiſſances quelconques. Ce qui doit effectivement arriver; car, en renverſant la courbe, & ſubſtituant la tenſion à la preſſion, la théorie précédente s'applique également à l'un ou l'autre cas, & donne préciſément la même expreſſion. Au reſte, la méthode de M. Euler n'a rien de commun avec celle-ci, que le réſultat.

COROLLAIRE I.er

Si la puiſſance horizontale étoit conſtante & égale à la preſſion en a, & ſi la réſultante des forces verticales étoit égale à la peſanteur de la portion de la voûte aM; pour lors, l'on auroit $\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\int p\,ds}$; d'où l'on tirera la valeur de p, ſi la courbe eſt donnée, & de même l'expreſſion de la courbe lorſque la loi de peſanteur p eſt donnée.

COROLLAIRE II.

Fig. 11. Si l'épaiſſeur de la voûte étoit finie, les mêmes ſuppoſitions exiſtantes, que dans le Corollaire précédent; ſoit R le rayon de la développée au point M; ſoit z le joint Mm, l'on aura $MM'mm' = \frac{ds(2R+z)}{2R}$, & par conſéquent $\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\int \frac{z\,ds(2R+z)}{2R}}$, d'où $\frac{A\,ddy}{dx} = \frac{z\,ds(2R+z)}{2R}$; mais $R = \frac{ds^3}{ddy.dx}$, & $\frac{ddy}{dx} = \frac{ds^3}{Rdx^2}$; ainſi, l'on aura $\frac{A(ds)^2}{Rdx^2} = \frac{z(2R+z)}{2R}$; ce qui donne

$$R + z = \left(RR + \frac{2A(ds)^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

équation générale pour une voûte quelconque, dans le système de la pesanteur.

EXEMPLE.

Si la courbe intérieure aMB étoit un cercle dont le rayon fut 1, & qu'on cherchât la valeur de z, il est clair que $\frac{ds}{dx} = \frac{MM'}{qM'} = \frac{1}{\text{cos}.\, s}$; ainsi $1 + z = \left(1 + \frac{2A}{(\text{cos}.\, s)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Si l'on suppose qu'au sommet de la courbe le joint $Aa = b$, l'on aura pour lors cos. $s = 1$, & $A = \frac{2b + bb}{2}$.

REMARQUE I.^{ere}

Par cette théorie, je n'ai cherché qu'à remplir la première condition d'équilibre, qui exige que toutes les forces qui agissent sur une portion de voûte $GaMm$, aient leur résultante perpendiculaire au joint Mm; mais il est facile de prouver que l'on a satisfait en même-temps à la deuxième condition, qui demande que cette résultante tombe entre les points M & m; car, puisque la force constante A agit perpendiculairement au joint vertical Ga, en un point quelconque S, il s'ensuit que puisque par la condition d'équilibre que l'on vient de remplir, la ligne des résultantes doit couper tous les joints perpendiculairement, elle formera une courbe parallèle à la ligne intérieure aB; ainsi, dans le cas où la force A seroit appliquée en a, la ligne des pressions seroit exactement la même que aMb.

M. Jacques Bernoulli *(Op. vol. II, p. 1119)* en cherchant la figure d'une voûte dont les voussoirs seroient égaux & très-petits, trouve, par les différentes conditions d'équilibre, deux expressions différentes; mais une fausse estimation dans les angles de cotangente, a donné lieu à l'erreur de M. Bernoulli, & la remarque en a été déjà faite dans les notes par les Éditeurs de ses Ouvrages.

REMARQUE II.

Il ſuit encore de la formule générale

$$R + z = \left(RR + \frac{2A(ds)^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

que toutes les fois que la voûte aB forme au point B un angle droit avec ſon axe EB, parallèle à l'horizon, le joint, dans ce point, devient infini ; ou que ce joint eſt l'aſymptote de la courbe extérieure CD; car, puiſque dans l'équation fondamentale, ds devient infini par rapport à dx, il ſuit que $R + z$ devient auſſi une quantité infinie. Ce réſultat ſe trouve peu conforme avec ce que nous voyons exécuter tous les jours, puiſque dans la pratique, les joints horizontaux, au lieu d'être infinis, ſont ſouvent aſſez petits. Dans la théorie, en outre, la courbe intérieure étant donnée, la longueur du joint eſt toujours une quantité donnée; quantité cependant que les Architectes varient à l'infini dans l'exécution. Mais le frottement & l'adhérence conſervent par leur réſiſtance l'équilibre, que la force de la gravité tend à détruire. Nous chercherons dans la ſuite la manière de faire entrer dans l'expreſſion des voûtes ces nouvelles forces coërcitives; mais l'on peut en attendant inférer de cette remarque, que dans l'exécution, la théorie qui précède, ne peut être, comme nous l'avons déjà dit dans le Diſcours préliminaire, que d'une foible utilité.

COROLLAIRE III.

Si la courbe extérieure, de même que la courbe intérieure étoient données, l'on pourroit déterminer, dans le cas d'équilibre, la direction des joints de la manière ſuivante.

Fig. 12. Soit ſuppoſé, comme plus haut, le joint aG vertical, prolongé indéfiniment en l; ſoit qM le joint en M, qui, prolongé, rencontre la verticale al en G; ſoit φ le centre de gravité de la partie $aGMq$; ſoit Sp la direction de la force horizontale conſtante A qui rencontre en p une verticale paſſant par le centre de gravité φ; la réſultante de

toutes les forces ſera exprimée par une ligne pn, qui (*art. 1*) doit être perpendiculaire au joint Mq, & paſſer entre les points M & q; ſoit tiré PM, parallèle à l'axe AB, & ſoit nommé h l'angle PMC. La courbe aMB étant donnée, de même que la courbe GqD, la peſanteur de la maſſe $GaMq$ ſera exprimée par une fonction de PM & de h; mais les deux triangles ſemblables prn, PCM, dont les côtés du premier ſont proportionnels aux forces qui agiſſent ſur la portion de voûte $GaMq$, donnent l'analogie ſuivante: P peſanteur de la portion de la voûte $GaMq$: A :: coſ. h : ſin. h, ou $P = \frac{A \text{ coſ. } h}{\text{ſin. } h}$. Nous verrons dans la ſuite quels ſont les points S entre a & G, où l'on peut appliquer la preſſion A, quantité déterminée par l'équation précédente, pour ſatisfaire à la deuxième condition d'équilibre; c'eſt-à-dire, pour que la réſultante pn paſſe toujours entre les points M & q.

EXEMPLE.

Si l'on vouloit déterminer la direction des joints d'une plate-bande d'une épaiſſeur conſtante & donnée; que $aGBb$ repréſente cette voûte compriſe entre deux lignes droites parallèles. La direction du joint vertical aG, de même que la direction du dernier joint Bb, par lequel la voûte s'appuie ſur le mur $BLKo$, étant données, l'on cherche la direction de tous les autres joints MM'; ſoit $aG = a$, $aM = x$, que la direction du joint MM' rencontre la verticale aG en G, l'on aura $GaMM' = P = ax + \frac{a^2 \text{ coſ. } h}{2 \text{ ſin. } h}$. Fig. 13.

Subſtituant cette valeur de P dans l'équation fondamentale $\frac{A \text{ coſ. } h}{\text{ſin. } h} = P$, il en réſulte $ax = (A - \frac{a^2}{2}) \frac{\text{coſ. } h}{\text{ſin. } h}$.

Pour avoir la valeur de la conſtante A, ſoit ſuppoſé que lorſque $x = aB = b$, $\frac{\text{coſ. } h}{\text{ſin. } h}$ égale C. L'on trouvera

$A = \frac{2ab + a^2 C}{2C}$; & par conséquent $x = \frac{b \operatorname{cof.} h}{C \operatorname{fin.} h}$; d'où l'on conclud que tous les joints d'une plate-bande paſſent par le même point C; ce qui donne une conſtruction très-facile.

Pour ſatisfaire, dans cet exemple, à la deuxième condition de l'*article I.er*, qui exige que la réſultante des forces qui tiennent en équilibre la portion de voûte $GaMM'$, paſſe entre les points M & M'; ſoit φr une ligne verticale paſſant par le centre de gravité de la maſſe totale $GaBb$. Si ſur le joint bB l'on élève au point B une perpendiculaire Bn, qui rencontre la verticale φr en n, & ſi, par ce point n on tire une ligne horizontale ns, le point S, où le joint vertical Ga ſera rencontré par cette ligne, ſera le point le plus bas ſur le joint Ga, où l'on puiſſe appliquer la force A, ſans que la plate-bande ſe rompe. Ainſi, ſi la direction du joint Bb étoit telle, que la ligne Bn rencontrât la verticale φr, en un point n, au-deſſus de la ligne Gb, il n'y auroit aucun point ſur le joint Ga, où l'on pût appliquer la force A, pour conſerver l'équilibre, & la plate-bande ſe briſeroit néceſſairement. Il eſt très-facile, d'après ces remarques, de déterminer la limite de l'inclinaiſon Bb, lorſque l'épaiſſeur Ga eſt donnée.

Je crois inutile d'avertir que ſi la réſultante Bn, pour la maſſe totale, paſſe par le point B, la réſultante, pour une maſſe particulière $GaMM'$, paſſera néceſſairement entre M & M', puiſque la quantité A reſtant conſtante, les maſſes $GaMM'$ diminuent. Ainſi, dès que l'on a ſatisfait à la deuxième condition d'équilibre pour le point B, l'on a néceſſairement ſatisfait à cette même condition pour un point quelconque M.

XVIII.

XVIII.

De l'équilibre des voûtes, en ayant égard au frottement & à la cohésion.

PROBLÈME.

Dans une voûte, la courbe intérieure aB, *la courbe extérieure* Gb *étant données, les joints* Mm, *perpendiculaires aux élémens de la courbe intérieure, seront aussi donnés: l'on demande les limites de la pression horizontale en* f, *qui soutiendra cette voûte, en supposant qu'elle soit sollicitée par sa propre pesanteur, & retenue par la cohésion & le frottement des joints.* Fig. 14.

Soit prise une portion de cette voûte, telle que $GaMm$, soit prolongé mM jusqu'en R; soit nommé l'angle R, h; soit la force de pression appliquée en f sur le joint vertical aG, exprimé par A.

Je suppose d'abord la portion $GaMm$ solide, en sorte qu'elle ne puisse se diviser que suivant Mm. Il faut donc, pour que cette portion de voûte soit en équilibre, que la force A soit telle qu'elle l'empêche de glisser suivant mM; mais la force dépendante de A, décomposée suivant Mm, & dirigée suivant cette même ligne, est......... A sin. h.

La force parallèle à mM, dépendante de φ............ φ cos. h.

La force perpendiculaire à mM, dépendante de A....... A cos. h.

La force perpendiculaire à mM, dépendante de φ....... φ sin. h.

Ainsi, l'on aura, en ayant égard au frottement & à l'adhérence, $\varphi \text{ cos. } h - A \text{ sin. } h \frac{-\varphi \text{ sin.} h - A \text{ cos.} h}{n} - \delta . Mm$, pour exprimer l'effort que fait cette portion de voûte pour glisser selon mM; & dans le cas que A sera seulement suffisant pour la soutenir, l'on aura

$$A = \frac{\varphi\,(\text{cos. } h - \frac{\text{sin. } h}{n}) - \delta\, Mm}{\text{sin. } h + \frac{\text{cos. } h}{n}}.$$

Or, comme par sa construction, la voûte peut non-seulement gliſſer ſur le joint mM, mais même ſur tout autre, il ſuit que pour que la voûte ne ſe rompe point, A ne doit jamais être moindre que la quantité $\frac{\varphi\,(\text{coſ.}\,h - \frac{\text{ſin.}\,h}{n}) - \delta Mm}{\text{ſin.}\,h + \frac{\text{coſ.}\,h}{n}}$, quelle que ſoit la valeur de h. Ainſi, ſi l'on prend la valeur de h, telle qu'elle donne pour A un *maximum*, pour lors la conſtante A, ainſi déterminée, ſera ſuffiſante pour ſoutenir toute la voûte.

Je ſuppoſe que $A_{\prime}$ exprime ce *maximum.*

Si l'on cherchoit à déterminer la force en f, de manière qu'elle fût prête à faire couler la portion de voûte qui oppoſeroit la moindre réſiſtance, ſuivant Mm, pour lors, l'on auroit, dans le cas d'équilibre, pour une portion quelconque $A = \frac{\varphi\,(\text{coſ.}\,h + \frac{\text{ſin.}\,h}{n}) + \delta Mm}{\text{ſin.}\,h - \frac{\text{coſ.}\,h}{n}}$; mais comme aucune portion de voûte ne doit gliſſer ſur un joint quelconque Mm, il faut que A ſoit toujours plus petit que cette dernière quantité. Ainſi il faut chercher le *minimum* de A qui exprimera la plus grande force que l'on puiſſe appliquer en f, ſans rompre la voûte, ſuivant un joint Mm; je ſuppoſe que A' ſoit ce *minimum.*

Ainſi, comme dans le cas de repos, qui eſt celui que nous cherchons à fixer, la voûte, en tout ou en partie, ne doit point gliſſer ſur ſes joints dans aucun ſens, il ſuit que les limites des forces que l'on peut appliquer en f, ſont compriſes entre $A_{\prime}$ & A', ou $A_{\prime}$ exprime la moindre force qui puiſſe preſſer le point f, & A' la plus grande force qui puiſſe preſſer ce même point; d'où l'on peut conclure que ſi $A_{\prime}$ eſt plus grand que A', il ne peut y avoir d'équilibre, puiſque la preſſion en f ne pouvant point être plus grande que A', ne peut point être non plus plus petite que $A_{\prime}$, que nous ſuppoſons plus grand que A'.

Pour ſatisfaire à préſent à la deuxième condition d'équilibre, il faut que la résultante gv, de toutes les forces qui agissent sur la portion de voûte $GaMm$, passe au-dessus du point M, & au-dessous du point m. Il faut, par conséquent, en nommant B la force qui agit en f, que BMQ soit toujours égal ou plus grand que $\varphi gM - \delta' zz$ (δ' étant une fraction constante de la cohésion du mortier, *art.* 7); & dans le cas où la résultante passeroit par le point M, l'on auroit $B = \frac{\varphi gM - \delta' zz}{MQ}$. Si la quantité B étoit supposée plus petite que $\frac{\varphi gM - \delta' zz}{MQ}$, pour lors la résultante gv passeroit au-dessous du point M, & la voûte se romproit. Ainsi, pour avoir la force B, suffisante pour soutenir toute la voûte, il faut chercher le *maximum* de B d'après l'équation précédente, & ce *maximum* exprimera la plus petite force que l'on puisse appliquer en f; que $A_{,}$ exprime ce *maximum*.

Comme il faut encore, pour satisfaire à la deuxième condition, que la résultante Lv passe au-dessous du point m, il suit que Bmq doit être plus petit, ou tout au plus égal à $\varphi Lq + \delta' zz$. Ainsi, d'après l'équation $B = \frac{\varphi . gq + \delta' zz}{mq}$, il faut déterminer la constante B, telle qu'elle représente le *minimum* de $\frac{\varphi gq + \delta' zz}{mq}$; & B', déterminé d'après cette considération, donnera pour Bmq une quantité égale à $\varphi qg + \delta' zz$, dans un point seulement, & plus petite dans tous les autres points m, & par conséquent B' exprimera la plus grande force que l'on puisse supposer agir en f; d'où l'on conclud que pour remplir la deuxième condition, la force appliquée en f ne peut point être plus petite que B, ni plus grande que B'. Par conséquent, pour joindre les deux conditions ensemble, si $A_{,}$ ou $B_{,}$ étoient plus grands que A' ou B', l'équilibre ne pourroit point avoir lieu, & la voûte, dont les dimensions seroient données, se romproit nécessairement.

Pour avoir actuellement les vraies limites, il suffit de prendre entre $A_{,}$ & $B_{,}$ la quantité la plus grande, & entre

A' & B' la quantité la plus petite, en ſorte que ſi $B_{,}$ étoit plus grand que $A_{,}$, & B' plus petit que A', $B_{,}$ & B' ſeroient les véritables limites des forces que l'on pourroit appliquer en f ſans rompre la voûte.

Remarque I.

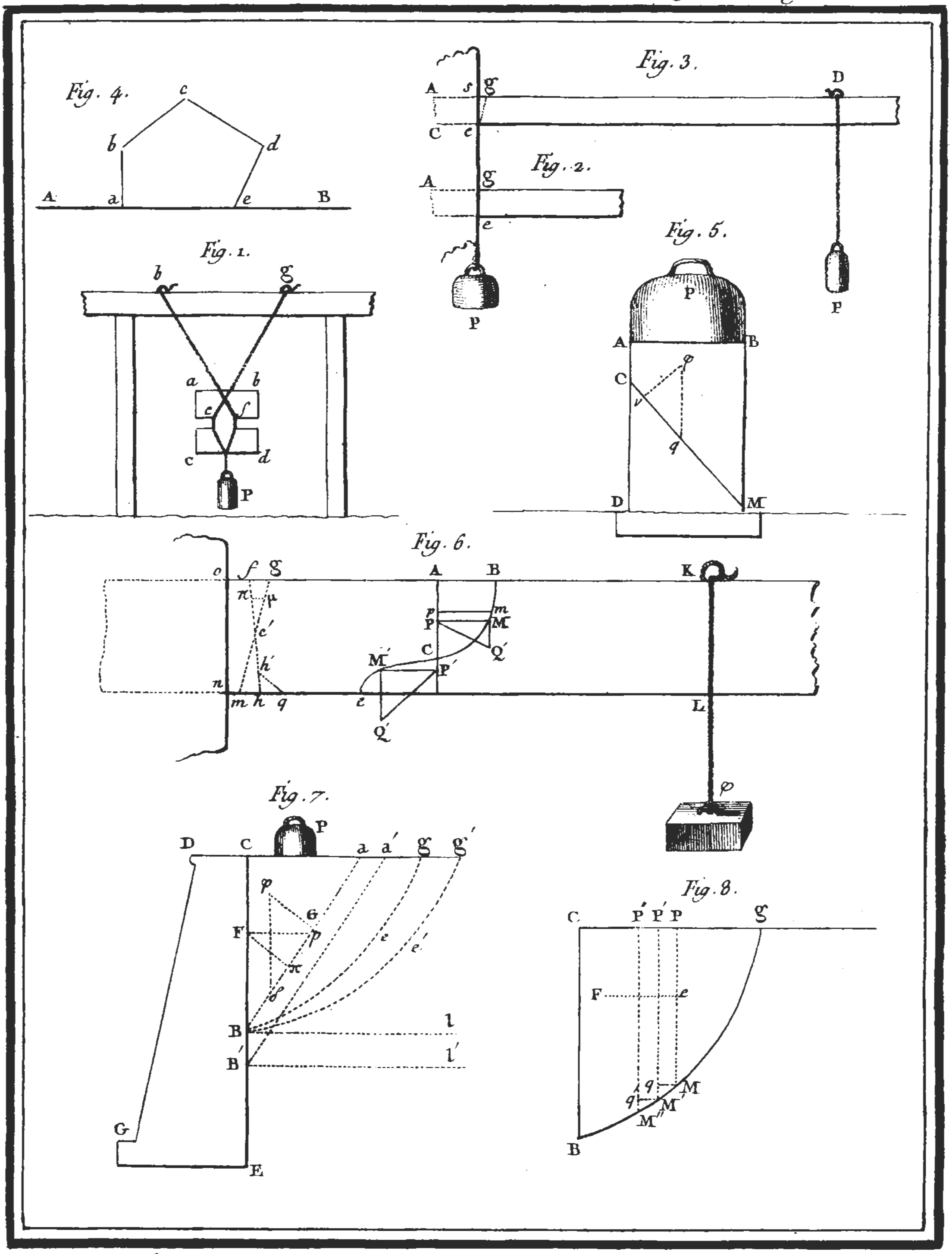
Le frottement eſt ſouvent aſſez conſidérable dans les matériaux que l'on emploie à la conſtruction des voûtes, pour que les différens vouſſoirs ne puiſſent point gliſſer l'un contre l'autre; en ce cas, l'on peut négliger la première condition d'équilibre; & il n'eſt plus néceſſaire que la réſultante des forces qui agit ſur une portion quelconque de voûte ſoit perpendiculaire aux joints qui la terminent; mais ſeulement qu'elle tombe ſur ces joints. Ainſi, en négligeant la cohéſion des joints, ce qui doit ſe faire dans les voûtes nouvellement conſtruites; il ſuffit de chercher le *maximum* de $\frac{\varphi g M}{MQ}$, pour déterminer la force $B_{,}$, & le *minimum* de $\frac{\varphi q g}{mq}$, pour déterminer B'; l'on doit en outre ſuppoſer que la force B agit en G, ſommet du joint, pour rendre la force $B_{,}$ auſſi petite qu'elle puiſſe être. Il faut cependant remarquer que lorſqu'on cherche à fixer l'état d'équilibre par cette ſeconde condition, en ſuppoſant les forces paſſant par les points G & M, il faut ſuppoſer que ces points ſont aſſez éloignés de l'extrémité des joints, pour que l'adhérence des vouſſoirs ne permette pas à ces forces d'en rompre les angles; ce qui ſe détermine par les méthodes que nous avons employées en cherchant la force d'un pilier.

Remarque II.

Dans la pratique, il ſera toujours plus ſimple de déterminer les limites de la force B par tâtonnement, que par des moyens exacts. Je ſuppoſe, par exemple, que l'on prenne la portion GaM de la voûte, telle que le joint Mm faſſe un angle de 45 degrés avec une ligne horizontale; l'on calculera la force $B_{,}$ dans cette ſuppoſition ; l'on cherchera enſuite cette même force par rapport à un ſecond joint, peu diſtant du premier, en s'approchant de la clef; ſi cette deuxième force eſt plus grande que la première, l'on ſera sûr que l'angle de rupture de la voûte eſt entre la clef & le premier joint; ainſi, en remontant, par cette même opération, vers cette clef, l'on déterminera facilement la vraie force $B_{,}$. Ce calcul ne ſauroit jamais être bien long, parce que par la propriété *de maximis & minimis*, il y aura, vers un point *M*, où l'on trouve la limite cherchée $B_{,}$, très-peu de variations ſur un aſſez grand développement de la courbe; & qu'ainſi, pour déterminer cette force $B_{,}$, il ne ſera néceſſaire que d'avoir à peu-près le point de rupture *M;* l'on déterminera par les mêmes moyens la plus grande force B' que puiſſe ſoutenir une voûte ſans ſe rompre. Par conſéquent, ſi les dimenſions de la voûte étoient données, comme nous le ſuppoſons ici, de même que la hauteur du pied-droit *BE*, ſur lequel elle porte, l'on déterminera facilement quelle doit être l'épaiſſeur *Bb* de ce pied-droit, pour que la réſultante de la force $B_{,}$, qui agit en *G*, & de la peſanteur totale de la voûte & de ſon pied droit paſſe entre *E* & *e*, ou paſſe par le point *e;* ce qui ſatisfera à la deuxième condition de ſolidité.

La deſtination de ce Mémoire, peut-être déjà trop long, ne me permet pas d'étendre cette théorie, ni de l'appliquer à toutes les eſpèces de voûtes; ainſi, je me contenterai d'avoir eſſayé de donner des moyens exacts, & tels que je les crois abſolument néceſſaires pour conſtater l'état de ſolidité.

En comparant les principes qui précèdent avec les différentes méthodes d'approximation uſitées dans la pratique, l'on s'apercevra facilement que leurs auteurs n'ont point aſſez diſtingué les deux conditions d'équilibre néceſſaires pour l'état de repos. Dans celle, par exemple, que l'on attribue à M. de la Hire, rapportée par M. Bélidor, & pratiquée par preſque tous les Artiſtes, l'on diviſe la voûte en trois parties, & l'on calcule la preſſion de la partie ſupérieure, en ſe conformant à la première condition d'équilibre, & l'on détermine enſuite les dimenſions des pieds-droits, par la deuxième condition d'équilibre. Or, pour peu que l'on y faſſe attention, l'on verra que ſi l'on diviſe la partie ſupérieure vers la clef, & que l'on ſuppoſe que cette voûte ſe rompe en quatre parties, au lieu de ſe rompre en trois, la force de preſſion des parties ſupérieures ſera ſouvent, dans les voûtes plates, beaucoup plus grande que celle qui ſe détermine par la méthode de M. de la Hire, & que les dimenſions des pieds-droits, fixés par cette méthode, ſeront ſouvent inſuffiſantes.



C^ne Haussard Sculp.

Fig. 9.

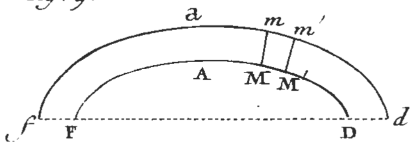


Fig. 10.

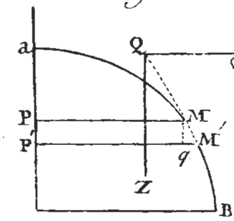


Fig. 11.

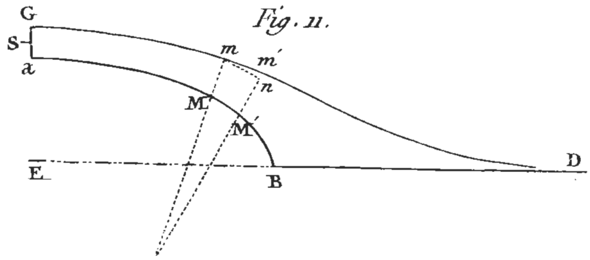


Fig. 12.

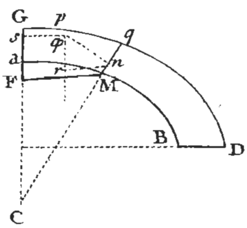


Fig. 13.

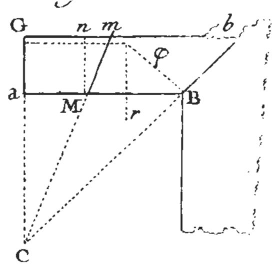
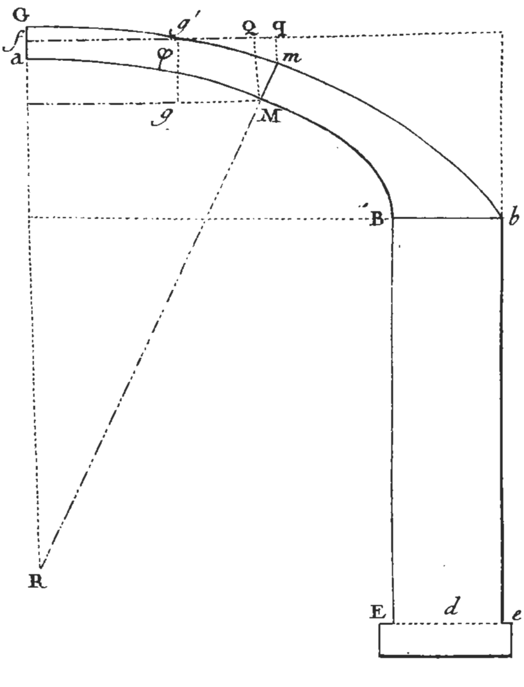


Fig. 14.



Elth Haussard Sculp.